



## COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

-----

*Ce problème a pour but d'introduire et d'étudier quelques notions relatives aux mouvements collectifs d'une chaîne de systèmes physiques identiques, placés à intervalles réguliers le long d'un axe, et couplés de proche en proche. L'exemple choisi ici est celui d'une chaîne de pendules, le couplage entre pendules voisins étant assuré par un fil de torsion.*

*Les candidats auront tout intérêt à aborder les questions, volontairement détaillées, dans l'ordre de l'énoncé. Lorsque ce dernier s'y prête, ils pourront admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.*

*Il n'est besoin ici ni de papier millimétré, ni de calculatrice.*

Notations :

- . les dérivées temporelles sont notées "•" :  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  ...
- .  $\text{Re}\{A\}$  désigne la partie réelle de la quantité complexe  $A$ , et  $A^*$  la quantité complexe conjuguée.

### I - MODES PROPRES DE TORSION D'UNE CHAÎNE DISCRETE

Soit  $(\Delta)$  un fil tendu horizontal,  $x$  une abscisse le long de  $(\Delta)$  et  $a$  une longueur. A chaque abscisse  $x_n$  multiple entier de  $a$  ( $x_n = na$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ ), on accroche au fil, par son centre  $G$ , un disque homogène  $(D)$  de masse  $M$  et de rayon  $R$ . Le disque numéro  $n$ ,  $(D_n)$ , est **solidaire** du fil au point  $G_n$ , et son plan est perpendiculaire à  $(\Delta)$  en  $G_n$ . Le brin de fil  $G_n G_{n+1}$ , de longueur  $a$ , possède par ailleurs une constante de torsion notée  $C$ . On désigne par  $\theta_n$  l'angle de torsion du fil  $(\Delta)$  par rapport à sa position de repos, et on précise que le seul degré de liberté de  $(D_n)$  est une **rotation** (d'angle  $\theta_n$ ) autour de l'axe horizontal  $(\Delta)$ , dont on néglige toute déformation due au poids des disques (voir Fig. 1). On appelle "chaînon  $n$ " le système constitué du disque  $(D_n)$  et du brin de fil  $G_n G_{n+1}$ , et "chaîne" l'ensemble des chaînons.

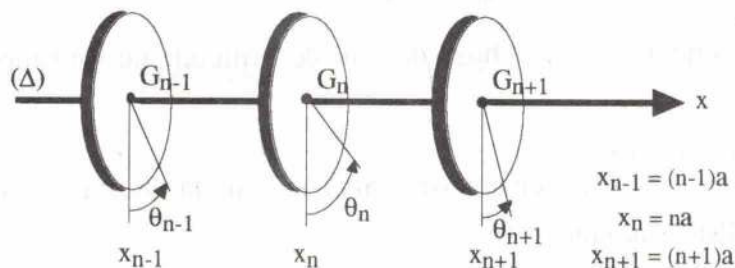


Figure 1

Tournez la page S.V.P.

On se propose, dans cette première partie, de montrer qu'à une telle chaîne constituée de  $N$  chaînons couplés, on peut associer un ensemble de  $N$  systèmes physiques à un degré de liberté, fictifs mais découplés les uns des autres, que l'on appelle "modes propres" de torsion de la chaîne.

### I-1 Chaîne discrète infinie : équations du mouvement et solutions progressives

Dans toute cette partie (I-1), la chaîne est supposée infinie.

(I-1-1 Calculer le moment d'inertie  $J$  d'un disque par rapport à son axe.

(I-1-2 Etablir l'équation du mouvement de  $(D_n)$ .

(I-1-3 On définit l'énergie mécanique totale  $E$  de la chaîne comme la somme de l'énergie cinétique des disques et de l'énergie potentielle de torsion du fil.

Exprimer  $E$  en fonction des  $\theta_n$  et des  $\dot{\theta}_n$ .

I-1-4 On cherche s'il existe des solutions des équations (I-1-2) de la forme :

$\theta_n(t) = \text{Re}\{A e^{i(qx_n - \omega t)}\}$  où  $\omega$ ,  $q$  et  $A$  sont respectivement la pulsation (supposée  $\geq 0$ ), le vecteur d'onde (ici à une dimension) et l'amplitude (a priori complexe) d'une onde progressive.

Montrer que de telles solutions existent, pourvu que  $\omega$  et  $q$  satisfassent une relation indépendante de  $A$ , dite "de dispersion", que l'on explicitera sous la forme  $\omega = f(q)$ .

(I-1-5 La fonction  $f$  trouvée précédemment est périodique en  $q$ .

a) Exprimer sa période  $G$ .

b) Montrer que les solutions  $\theta_n(t)$  envisagées à la question (I-1-4) précédente sont inchangées si on y remplace  $q$  par  $q+pG$ , où  $p$  est un entier relatif quelconque.

c) Quelle est la caractéristique physique du système à l'origine de l'invariance ci-dessus ?

(I-1-6 Dorénavant, on choisira  $q$  dans l'intervalle  $]-\frac{G}{2}, +\frac{G}{2}]$ , que l'on appellera "première zone de Brillouin".

a) Tracer le graphe de la fonction  $f$  ( $\omega$  en ordonnée,  $q$  en abscisse).

b) Définir, et calculer en fonction de  $C$ ,  $J$ ,  $a$  et  $q$ , la vitesse de phase  $v_\varphi$  et la vitesse de groupe  $v_g$ .

I-1-7 On se place, dans cette question, en **centre** de zone de Brillouin, i.e. on considère l'onde décrite à la question (I-1-4) en supposant qu'on a :  $|qa| \ll 1$ .

a) Montrer que  $v_\varphi$  et  $v_g$  sont toutes deux égales à une valeur commune  $v$ , indépendante de  $q$ , que l'on exprimera en fonction de  $C$ ,  $J$  et  $a$ .

b) Que peut-on dire des phases des mouvements respectifs de deux disques consécutifs  $(D_n)$  et  $(D_{n+1})$  ?

c) Interpréter physiquement la condition :  $|qa| \ll 1$ .

(I-1-8 On se place, dans cette question, en **bord** de zone de Brillouin, i.e. on suppose par exemple :  $q = +\frac{G}{2}$ .

a) Même question qu'en (I-1-7-b).

b) L'état physique de la chaîne est-il changé si, dans l'onde de la question (I-1-4), on change  $q$  en  $-q = -\frac{G}{2}$  ? Est-ce surprenant ?

c) Calculer la vitesse de groupe  $v_g$  en bord de zone.



I-1-9 La "bande permise", c'est-à-dire le spectre des pulsations  $\omega$  des ondes de torsion qui peuvent se propager le long de la chaîne, s'étend de zéro à une valeur de "coupure"  $\omega_c$ .

- a) Donner l'expression de  $\omega_c$ .
- b) Déterminer **directement** la valeur de  $\omega_c$  à partir de l'équation du mouvement du disque ( $D_n$ ) établie à la question (I-1-2) en s'inspirant du résultat de la question (I-1-8-a), valable en bord de zone de Brillouin.

**I-2 Chaîne discrète finie : variables normales et modes propres de torsion.**

Dans la partie (I-1) précédente, la chaîne était supposée infinie. On considère, dans cette partie (I-2), une chaîne composée de  $N$  chaînons (on rappelle qu'un chaînon est constitué d'un disque ( $D$ ) et d'un brin de fil de longueur  $a$  et de constante de torsion  $C$ ). La longueur totale de la chaîne est donc  $L = Na$ . Afin de s'affranchir des effets de bord inhérents à la finitude de la chaîne, on suppose cette dernière bouclée sur elle-même : on est ainsi ramené à l'étude d'une chaîne discrète infinie, comme dans la partie (I-1), mais dont les mouvements  $\{\theta_n(t)\}$  doivent satisfaire la contrainte :

$$\theta_{n+N}(t) = \theta_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

appelée condition aux limites périodique de Born-Von Karman (BVK).

I-2-1 On cherche encore les solutions des équations du mouvement de la chaîne sous la forme des ondes progressives de la question (I-1-4).

a) Montrer que la relation de dispersion établie dans la partie (I-1) est encore valable, mais qu'il n'existe en revanche qu'un ensemble discret de valeurs de  $q$  qui satisfont la condition BVK.

b) Montrer que les valeurs de  $q$  en question peuvent s'écrire :

$$q_m = m q_1 \text{ avec } m \in \mathbb{Z}$$

où  $q_1$  est une quantité que l'on exprimera en fonction de  $L$ .

c) Montrer qu'il y a exactement  $N$  telles valeurs  $q_m$  dans la première zone de Brillouin. (On envisagera les deux parités possibles de  $N$ ).

I-2-2 Jusqu'à présent, les mouvements de la chaîne étaient décrits par le jeu des  $N$  variables dynamiques indépendantes  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ . L'existence des solutions en ondes progressives de la question (I-1-4) suggère d'introduire le nouveau jeu de variables, dites "normales" :

$$\xi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-iq_m x_n} \theta_n(t)$$

où les  $q_m$  désignent les quantités introduites en (I-2-1-b).

On peut montrer qu'alors les  $\{\theta_n\}$  se déduisent des  $\{\xi_m\}$  par :

$$\theta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{+iq_m x_n} \xi_m(t),$$

où  $\sum_m$  représente une somme sur une suite quelconque de  $N$  entiers consécutifs.

- a) En utilisant l'équation établie en (I-1-2), écrire celle vérifiée par  $\xi_m(t)$ . On posera  $\omega_m = f(q_m)$ .
- b) De quel type général de système physique l'équation trouvée au (a) ci-dessus décrit-elle le mouvement libre ?
- c) Quel avantage le choix du jeu des variables  $\{\xi_m\}$  présente-t-il par rapport à celui du jeu  $\{\theta_n\}$  ?

## II - APPROXIMATION DE LA CHAÎNE CONTINUE

On envisage dans cette seconde partie une **description continue** de la chaîne étudiée en (I-1). On considère donc un fil de torsion infini, tendu horizontalement, à symétrie de révolution autour de son axe ( $\Delta$ ), et tel que chaque "tranche" de fil d'épaisseur  $dx$  ( $x$  désigne toujours l'abscisse le long de ( $\Delta$ )) possède un moment d'inertie  $J dx$  par rapport à ( $\Delta$ ) et une constante de torsion  $\frac{C}{dx}$ .

### II-1 Equations du mouvement et solutions générales

#### II-1-1

- a) Justifier la position de l'élément infinitésimal  $dx$  au **dénominateur** dans l'expression ci-dessus de la constante de torsion d'une tranche de fil d'épaisseur  $dx$ .
- b) Quelles relations y-a-t-il entre  $J$  et  $J$ , et  $C$  et  $C$  ?

II-1-2 On désigne par  $\theta(x,t)$  l'angle de torsion de la section droite d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  (cf. Fig. 1, en y remplaçant  $\theta_n$  par  $\theta(x)$ ).

Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\theta(x,t)$  est de la forme :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

où  $v$  est une quantité que l'on exprimera en fonction de  $J$  et de  $C$ .

II-1-3 On fait les changements de variables :  $X = t - \frac{x}{v}$ ,  $Y = t + \frac{x}{v}$ .

a) Ecrire l'équation aux dérivées partielles précédente en variables  $X$  et  $Y$ .

b) En déduire que la solution la plus générale de l'équation trouvée en (II-1-2) s'écrit :

$\theta(x,t) = F(t - \frac{x}{v}) + G(t + \frac{x}{v})$ , où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions (presque) quelconques d'une seule variable.

c) Quelle est la signification physique du résultat (b) précédent ?

II-1-4 On désigne par  $\mathcal{E}(x,t)$  la **densité linéique** d'énergie mécanique (telle que définie en (I-1-3)).

a) Donner l'expression de  $\mathcal{E}$  en fonction de  $J$ ,  $C$  et  $\theta(x,t)$ .

b) Montrer qu'il existe une quantité  $\mathcal{G}$  telle qu'on ait, pour tout mouvement  $\theta(x,t)$  solution

de l'équation (II-1-2), la relation :  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0$ .



II-1-5

- a) Quelle est la signification physique de la relation ci-dessus ?
- b) Dans quel(s) autre(s) domaine(s) de la physique avez-vous déjà rencontré une relation analogue ? Proposez un nom pour la quantité  $\mathcal{G}$ .

II-1-6 On suppose que le mouvement de la chaîne est décrit par une solution du type :

$$\theta(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

- a) Montrer que les densités d'énergie cinétique et élastique (i.e. de torsion) sont égales pour tout  $x$  et pour tout  $t$ .
- b) Calculer  $\mathcal{G}$  et montrer qu'il s'exprime très simplement en fonction de  $\mathcal{E}$ .

II-1-7 Mêmes questions que (II-1-6-a et b) en supposant un mouvement décrit par :

$$\theta(x,t) = G\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

II-1-8 On considère maintenant la solution la plus générale du mouvement, soit (cf. (II-1-3-b)) :

$$\theta(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Calculer  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}$ . Que remarque-t-on ?

## II-2 Traversée d'une discontinuité.

Dans cette partie (II-2), on étudie la propagation d'ondes de torsion le long d'une chaîne infinie obtenue en accolant, en  $x = 0$ , deux chaînes semi-infinies de caractéristiques différentes (voir Fig. 2) :

Pour  $x < 0$  (région notée 1), les caractéristiques de la chaîne sont  $\mathcal{J}_1$  et  $C_1$ .

Pour  $x > 0$  (région notée 2), les caractéristiques sont  $\mathcal{J}_2$  et  $C_2$ .

On pose :  $z_1 = \mathcal{J}_1 v_1$ ,  $z_2 = \mathcal{J}_2 v_2$ .

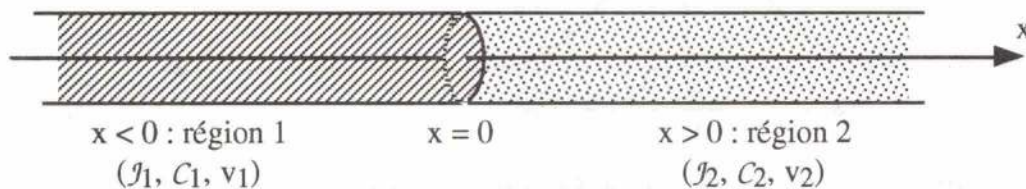


Figure 2

II-2-1 On suppose que la chaîne a été excitée (dans le passé) en  $x = -\infty$ , de sorte qu'une onde de torsion, dite "incidente", s'y propage dans le milieu 1, décrite par :

$$\theta_i(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v_1}\right).$$

- a) Que se passe-t-il lorsque l'onde incidente atteint l'abscisse  $x = 0$  ?
- b) Dans quel(s) autre(s) domaine(s) de la physique avez-vous rencontré une situation analogue ?
- c) Proposez, par analogie, un nom pour le plan de séparation ( $x = 0$ ) entre les deux régions.

Tournez la page S.V.P.

- d) Comme cela a été établi en (II-1-3-b), la solution générale de l'équation de propagation (II-1-2) s'écrit :

$$\theta_1(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + G\left(t + \frac{x}{v_1}\right) \quad \text{pour } x < 0$$

$$\theta_2(x,t) = H\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + K\left(t + \frac{x}{v_2}\right) \quad \text{pour } x > 0$$

et on se propose de déterminer les 3 fonctions G, H et K à partir de F, supposée connue. Ecrire les 3 conditions aux limites du problème.

### II-2-2

- En déduire les expressions de G, H et K en fonction de F et de  $z_1$  et  $z_2$ .
- Définir, et exprimer en fonction de  $z_1$  et  $z_2$ , les coefficients de réflexion  $r_{12}$  et de transmission  $t_{12}$  en **amplitude** pour la variable  $\theta$ .
- Commenter le signe de  $r_{12}$  en fonction des valeurs relatives de  $z_1$  et  $z_2$  ( $z_1$  étant fixée, on pourra examiner les cas limites :  $z_2 \rightarrow 0$  et  $z_2 \rightarrow \infty$ ).
- Des changements de signe de  $r_{12}$  se produisent-ils dans la (les) situation(s) analogue(s) évoquée(s) à la question (II-2-1-b) ?

### II-2-3

- En s'inspirant des résultats des questions (II-1-6) à (II-1-8), proposer une définition des coefficients de réflexion  $R_{12}$  et de transmission  $T_{12}$  en **puissance**.
- Exprimer  $R_{12}$  et  $T_{12}$  en fonction de  $z_1$  et  $z_2$ .
- Vérifier et interpréter une relation très simple entre  $R_{12}$  et  $T_{12}$ .

- II-2-4 On suppose que la fonction  $F(X)$  introduite en (II-2-1) a un support borné de largeur  $\Delta t$ , centré autour de  $X = 0$  (voir Fig. 3). On se propose d'étudier qualitativement le comportement de la solution  $\theta(x,t)$ .

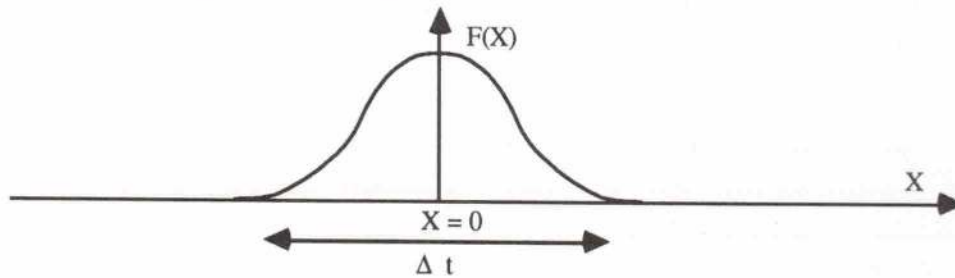


Figure 3

- Donner l'allure de la fonction  $\theta(x,t)$  en fonction de  $x$  aux instants  $t = -2\Delta t$  et  $t = +3\Delta t$  (on supposera  $v_2 = \frac{v_1}{2}$ , et on distinguera les cas  $z_1 > z_2$  et  $z_1 < z_2$ ).
- Examiner le cas  $z_1 = z_2$ .

### II-3 Modes propres de la chaîne continue.

On considère dans cette partie une chaîne unique homogène de caractéristiques  $J$  et  $C$ .

II-3-1 La chaîne continue étant supposée **infinie**, on s'intéresse, comme en (I-1-4), aux ondes sinusoïdales progressives.

- Montrer que l'équation (II-1-2) admet des solutions de la forme :

$$\theta(x,t) = \text{Re}\{Ae^{i(qx - \omega t)}\} \quad (\omega \geq 0).$$



b) Ecrire la nouvelle relation de dispersion sous la forme  $\omega = f_c(q)$  (indice c pour "continue") et tracer le graphe de la fonction  $f_c$ . On rappellera, sur le même diagramme, le graphe de la fonction  $f$  établi en (I-1-6-a).

II-3-2 On se propose de comparer les descriptions discrète et continue de la chaîne.

a) La fonction  $f_c$  est-elle périodique en  $q$  ? Qu'est devenue, dans la description continue, la première zone de Brillouin ?

b) Montrer qu'on passe simplement de  $f$  à  $f_c$  en faisant varier un paramètre que l'on précisera.

c) Montrer que, de la même façon, on passe de l'équation du mouvement établie en (I-1-2) (chaîne discrète) à celle établie en (II-1-2) (chaîne continue).

II-3-3 On suppose maintenant que la chaîne continue est de longueur **finie**  $L$ . Tout comme on l'a fait dans la partie (I-2), on s'affranchit des effets de bords en la bouclant sur elle-même, ce qui revient à imposer à  $\theta(x,t)$  la condition aux limites périodique de BVK, soit :  $\theta(x+L,t) = \theta(x,t)$  quel que soit  $x$ .

a) Les résultats des questions (I-2-1-a) et (I-2-1-b) sont-ils encore valables ?

b) Combien y-a-t-il de vecteurs d'onde  $q$  compatibles avec la condition BVK dans la première zone de Brillouin ? Ce résultat est-il surprenant ?

II-3-4 Modèle de Debye.

On souhaite disposer d'un modèle de chaîne **discrète** qui, tout en conservant les avantages de la description continue étudiée dans cette partie (II), rende compte du nombre **exact** de modes propres (i.e.  $N$  pour une chaîne de longueur  $L = Na$ , (cf. (I-2-1-c))). On introduit pour cela une pulsation de coupure  $\omega_D$ , et une relation de dispersion  $\omega = f_D(q)$ , dites "de Debye", telles que :

$$\begin{cases} f_D(q) = v|q| & \text{si } v|q| < \omega_D \\ f_D(q) = 0 & \text{si } v|q| > \omega_D \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de  $f_D$  sur le diagramme utilisé pour  $f$  et  $f_c$  (cf. (II-3-1-b)).

On posera  $q_D = \frac{\omega_D}{v}$ .

b) Exprimer  $\omega_D$  en fonction de  $v$  et  $a$  (on supposera  $N \gg 1$ , et on ne se préoccupera pas de sa parité).

c) Comparer  $\omega_D$  à la pulsation de coupure exacte  $\omega_c$  calculée en (I-1-9). Commenter.

II-3-5 Domaine de validité de la description de Debye.

a) Calculer la longueur d'onde associée à la pulsation  $\omega_D$  et la comparer à la taille des chaînons.

b) De manière plus générale, préciser le domaine de validité de la description continue de la chaîne discrète. (On pourra raisonner en termes de zone de Brillouin).

c) En particulier, quelle condition doit satisfaire la fonction  $F(X)$  (voir (II-2-4) et Fig. 3) pour que la quantité  $\theta_i(x,t)$ , introduite en (II-2-1), décrive correctement une onde se propageant sur la chaîne discrète étudiée. On écrira une condition nécessaire sur

l'extension spatiale du support de  $\theta_i(x,t)$  (à  $t$  fixé, donc), et on en déduira une inégalité vérifiée par  $\Delta t$ .

#### II-4 Etude du comportement d'un paquet d'ondes.

On utilise, dans toute cette partie (II-4), le modèle de Debye étudié aux questions (II-3-4) et (II-3-5) précédentes.

II-4-1 On considère la chaîne homogène (caractéristiques  $J, C$ ) de la partie (II-3). Une onde progressive s'y propage dans le sens positif ( $x$  croissants). Expliquer pourquoi cette propagation s'effectue **sans déformation**.

II-4-2 On peut considérer que l'onde de torsion précitée résulte de la superposition d'ondes sinusoïdales progressives (cf. (II-1-3-a)). Le "paquet" d'ondes correspondant s'écrit, dans ces conditions :

$$\theta(x,t) = \text{Re} \left\{ \int_0^{q_D} dq \mathcal{A}(q) e^{i(qx - \omega(q)t)} \right\}$$

où  $\mathcal{A}(q) dq$  est une amplitude, a priori complexe.

- Expliquer pourquoi l'expression ci-dessus traduit une propagation sans déformation.
- Montrer qu'à tout instant  $t$  il existe une abscisse  $x(t)$ , que l'on déterminera, telle que toutes les composantes du paquet d'ondes  $y$  soient en phase (on supposera  $\mathcal{A}(q)$  réelle pour simplifier).

II-4-3 Le point d'abscisse  $x(t)$  est appelé "centre" du paquet d'ondes.

- Décrire son mouvement.
- Comparer sa vitesse  $v_g$  (vitesse de groupe) à la vitesse de phase  $v_\phi$  des ondes composant le paquet.

II-4-4 On considère maintenant, et pour toute la suite de cette partie (II-4), la propagation le long des deux chaînes semi-infinies accolées (en  $x = 0$ ) de la partie (II-2).

Une onde de torsion sinusoïdale incidente, d'amplitude (complexe)  $B_i$ , de pulsation  $\omega_0$  et de vecteur d'onde  $q$  étant émise depuis  $x = -\infty$ , écrire la solution  $\theta(x,t)$  de l'équation de propagation établie en (II-1-2) dans les deux régions  $x < 0$  et  $x > 0$ .

II-4-5 On considère maintenant non plus le cas d'une onde sinusoïdale incidente, mais d'un **paquet** de telles ondes.

- Montrer que le paquet incident peut s'écrire :

$$\theta_i(x,t) = \text{Re} \left\{ \int_0^{\omega_D} d\omega \mathcal{B}_i(\omega) e^{i(q(\omega)x - \omega t)} \right\}$$

(on explicitera la quantité  $q(\omega)$ ).

- Ecrire la solution  $\theta(x,t)$  complète, dans les deux régions  $x < 0$  et  $x > 0$ .
- Décrire l'évolution temporelle du paquet d'ondes incident et le mouvement de son centre. (La fonction  $\mathcal{B}_i(\omega)$  sera prise réelle pour simplifier).



d) On suppose que  $\mathcal{B}_i(\omega)$  est négligeable en dehors d'un intervalle de largeur  $\Delta\omega$  centré en  $\omega = \omega_0$ .

Estimer l'extension spatiale  $\Delta x$  du paquet d'ondes incident.

### III - CHAÎNE AVEC BALOURD

Dans les parties (I) et (II) précédentes, les disques ( $D_n$ ) étaient accrochés au fil par leur centre  $G_n$ , de sorte que la pesanteur  $\vec{g}$  n'avait aucune action sur leur mouvement. Dans cette partie (III), en revanche, on suppose que le disque ( $D_n$ ) est accroché au fil, toujours tendu horizontalement, en un point  $O_n$ , à une distance  $G_n O_n = \ell$  de son centre (voir Fig. 4). Comme précédemment, le seul degré de liberté de ( $D_n$ ) est une rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe ( $\Delta$ ) du fil. La position de ( $D_n$ ) est repérée par l'angle  $\theta_n = (\vec{g}, \overrightarrow{O_n G_n})$ , compté algébriquement autour de ( $\Delta$ ). On suppose également, comme en (I) et en (II), que l'angle de torsion du brin de fil qui relie ( $D_n$ ) à ( $D_{n+1}$ ) est nul si  $\theta_n = \theta_{n+1}$ .

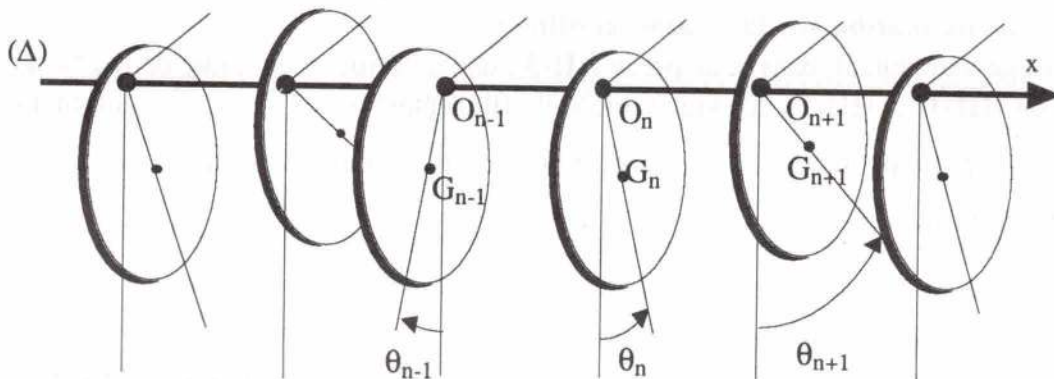


Figure 4

#### III-1 Equations générales.

III-1-1 Calculer, en fonction de  $J$ ,  $M$  et  $\ell$ , le moment d'inertie  $J'$  d'un disque par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) du fil.

III-1-2 La chaîne étant supposée infinie, compléter l'équation (I-1-2) du mouvement de ( $D_n$ ).

III-1-3 Donner la nouvelle expression de l'énergie mécanique totale  $E$  de la chaîne, en fonction des  $\{\theta_n\}$  et  $\{\dot{\theta}_n\}$ .

III-1-4 L'équation (III-1-2) admet-elle des solutions **exactes** de la forme (I-1-4) ? Pourquoi ?

Tournez la page S.V.P.

### III-2 Approximation des petits angles.

On supposera dans cette partie (III-2) que l'on a :  $\forall n, |\theta_n| \ll 1$ , de sorte qu'il est légitime de développer le terme d'énergie potentielle de pesanteur à l'ordre le plus bas non nul en  $\{\theta_n\}$ .

#### III-2-1

- Montrer qu'il existe, à l'approximation des petits angles, des solutions progressives du type (I-1-4) à l'équation (III-1-2).
- Etablir la relation de dispersion  $\omega(q)$  correspondante et la tracer sur un diagramme. On posera :  $Mg\ell = J\omega'_0{}^2$ .

III-2-2 La bande de pulsations "permises" (cf. (I-1-9)), mise en évidence sur le graphe précédent, présente une coupure "basse" et une coupure "haute"  $\omega'_c$ .

- Donner les expressions de ces deux coupures.
- Montrer qu'on peut les déterminer directement à partir de l'équation (III-1-2) d'une part, et d'arguments physiques très simples sur les mouvements relatifs des disques en centre puis en bord de zone de Brillouin d'autre part.

### III-3 Approximation de la chaîne continue.

On envisage maintenant, dans cette partie (III-3), une description continue de la chaîne étudiée en (III-1) et (III-2) : chaque tranche de fil d'épaisseur  $dx$  possède un moment d'inertie  $J'dx$  par rapport à  $(\Delta)$ , une constante de torsion  $\frac{C}{dx}$  et une masse  $\mu dx$ . La chaîne est supposée infinie.

#### III-3-1

- Ecrire les relations qui lient  $J'$  et  $J$ ,  $M$  et  $\mu$ .
- Ecrire l'équation aux dérivées partielles **exacte** vérifiée par l'angle de torsion  $\theta(x,t)$ .

III-3-2 On fera désormais l'approximation des petits angles (cf. (III-2)).

- Montrer qu'il existe des solutions sinusoïdales progressives du type (II-3-1-a).
- Ecrire la relation de dispersion correspondante sous la forme  $\omega = f_c(q)$  ( $c$  pour "continue" et  $'$  pour "avec balourd").
- Tracer le graphe de la fonction  $f_c'$  et le comparer à celui obtenu en (III-2-1-b).
- La coupure "basse" qui apparaît est-elle différente de celle obtenue en (III-2-2-a) dans le cadre de la description discrète de la chaîne ? Expliquer pourquoi, en s'appuyant sur un argument physique simple.

III-3-3 La chaîne est maintenant supposée constituée de deux chaînes semi-infinies accolées en  $x = 0$  et ayant les caractéristiques suivantes :

Pour  $x < 0$  (région 1), la chaîne **n'a pas** de balourd (i.e.  $\ell = 0$ ), et ses constantes sont  $J$ ,  $C$ ,  $\mu$ .



Pour  $x > 0$  (région 2), la chaîne  $a$  du balourd (i.e.  $\ell \neq 0$ ) et ses constantes sont  $j'$ ,  $C$ ,  $\mu$ . Une onde progressive sinusoïdale incidente,  $\theta_i(x,t) = \text{Re}\{A_i e^{i(qx - \omega_0 t)}\}$ , est émise depuis  $x = -\infty$ .

De quel(s) type(s) de phénomène la discontinuité en  $x = 0$  est-elle responsable ? On posera :

$$v = \sqrt{\frac{C}{j}}, \quad v' = \sqrt{\frac{C}{j'}}, \quad \omega'_0 = \sqrt{\frac{\mu g \ell}{j'}}$$

et on distinguera les cas  $\omega_0 > \omega'_0$  et  $\omega_0 < \omega'_0$ .

III-3-4 On s'intéresse dans toute la suite du problème au cas  $\omega_0 < \omega'_0$ .

a) Ecrire la solution générale de l'équation, linéarisée au besoin, vérifiée par  $\theta(x,t)$  dans

chacune des deux régions 1 et 2. On posera  $K_0 = \frac{\sqrt{\omega'_0{}^2 - \omega_0{}^2}}{v'}$ .

b) Ecrire les conditions aux limites du problème. En déduire  $\theta(x,t)$  pour tout  $x$  (on exprimera toutes les amplitudes complexes en fonction de  $A_i$ ).

c) Calculer la moyenne temporelle  $\langle \mathcal{G} \rangle$  de la quantité  $\mathcal{G}$  définie en (II-1-4-b), dans les régions 1 et 2. Conclure.

d) Pouvez-vous citer une (ou plusieurs) situation(s) analogue(s) rencontrée(s) dans d'autres domaines de la physique ?

III-3-5 On reprend maintenant l'étude de la question (II-4-5). On considère donc non plus le cas de l'onde sinusoïdale incidente de la question (III-3-3), mais celui du paquet d'ondes décrit en (II-4-5-a). On suppose de surcroît que  $\mathcal{B}_i(\omega)$  est une fonction réelle de  $\omega$ , "piquée" autour de la valeur  $\omega_0$  (plus précisément,  $\mathcal{B}_i(\omega)$  est négligeable en dehors d'un intervalle de largeur  $\Delta\omega \ll \omega'_0 - \omega_0$ , centré en  $\omega = \omega_0$ ).

a) Décrire le mouvement du centre du paquet d'ondes incident.

b) Montrer que le paquet réfléchi s'écrit :

$$\theta_r(x,t) = \text{Re} \left\{ \int_0^{\omega_D} d\omega \mathcal{B}_i(\omega) e^{-2i\varphi(\omega)} e^{-i(q(\omega)x + \omega t)} \right\} \text{ où } \varphi(\omega) \text{ est un angle de}$$

phase que l'on exprimera en fonction  $q(\omega)$  et de  $K(\omega) = \frac{\sqrt{\omega'_0{}^2 - \omega^2}}{v'}$ .

c) Montrer qu'à tout instant  $t$  appartenant à un intervalle que l'on précisera correspond un point d'abscisse  $x_r(t)$ , encore appelé "centre" du paquet d'ondes réfléchi, tel que les phases desdites ondes réfléchies  $y$  soient égales à des termes d'ordre  $(\omega - \omega_0)^2$  près.

d) Décrire le mouvement du centre du paquet réfléchi, et montrer que la présence du facteur de phase  $e^{-2i\varphi(\omega)}$  se traduit par un **retard**  $2\tau$  à la réflexion que l'on exprimera en

fonction de  $\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega_0}$ .

III-3-6

- a) Ecrire le paquet d'ondes  $\theta_2(x,t)$  dans la région 2 ( $x > 0$ ).
- b) Montrer qu'il n'existe pas d'abscisse  $x(t) > 0$  ayant les propriétés rappelées en (III-3-5-c) ci-dessus, mais que  $|\theta_2(x,t)|$  est maximale à un instant  $t_0$  que l'on exprimera en fonction de  $\tau$ .
- c) Proposer en conséquence une interprétation physique du retard à la réflexion en précisant à quel instant le paquet incident fait demi-tour.

III-3-7 On considère maintenant la chaîne suivante, constituée de trois tronçons accolés en  $x = 0$  et en  $x = d$  (voir Fig. 5) :

1er tronçon (région 1,  $x < 0$ ) : chaîne sans balourd, de constantes  $C, J$

2ème tronçon (région 2,  $0 < x < d$ ) : chaîne avec balourd, de constantes  $C, J', \omega'_0 = \sqrt{\frac{\mu g \ell}{J'}}$

3ème tronçon (région 3,  $x > d$ ) : identique au premier tronçon

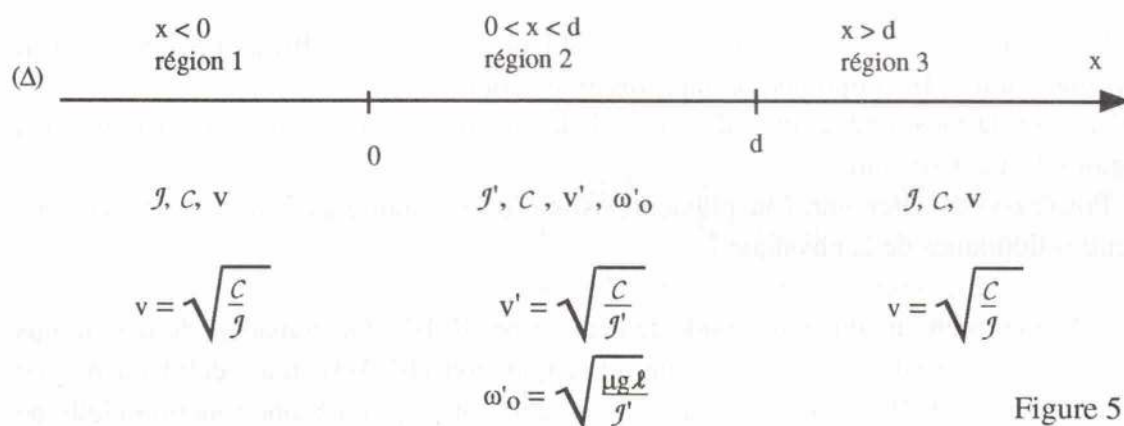


Figure 5

- a) L'onde progressive sinusoïdale incidente de la question (III-3-3) est émise depuis  $x = -\infty$ .

Ecrire la solution générale de l'équation, linéarisée en région 2, vérifiée par  $\theta(x,t)$  dans chacune des trois régions 1, 2 et 3. On posera, comme en (III-3-4-a),  $K_0 = K(\omega_0)$ .

- b) Ecrire les conditions aux limites du problème. En déduire  $\theta(x,t)$  dans les trois régions. On vérifiera en particulier que la solution dans la région 3 peut s'écrire :

$$\theta_3(x,t) = \text{Re} \left\{ A_i \frac{\text{sh}(2i\varphi)}{\text{sh}(K_0 d + 2i\varphi)} e^{i(q(x-d) - \omega_0 t)} \right\}.$$

- c) On suppose désormais que ce n'est plus l'onde sinusoïdale incidente du (a) (cf. aussi (III-3-3)), mais le paquet d'ondes décrit en (II-4-5-a) qui est émis depuis  $x = -\infty$ . On suppose d'autre part qu'on a :  $K_0 d \gg 1$ .

Ecrire le paquet d'ondes  $\theta_3(x,t)$  dans la région 3.

- d) Déterminer le mouvement du centre de ce paquet d'ondes.

A quel instant émerge-t-il de la région 2 ?

- e) L'instant calculé en (d) ci-dessus dépend-il de la longueur  $d$  de la région 2 ? Ce résultat est-il choquant ?

- f) Proposer un nom à l'"effet" décrit dans cette question (III-3-7). Lui connaissez-vous un (ou plusieurs) analogue(s) en optique ? En mécanique quantique ?